行列式的定义与性质

林胤榜

同济大学数学科学学院

主要内容

二阶行列式

定义

方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$$

的行列式是

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

最后一个等式是对角线法则的一个例子.

逆矩阵

行列式的重要性:

定理

$A \in M_{2\times 2}$ 可逆当且仅当 A 的行列式不等于零.

问题

如何求方阵 A 的逆?

利用伴随矩阵.

定义

假设 $A = (a_{ij})$ 是二阶方阵, 则它的伴随矩阵是

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

得到伴随矩阵的步骤:

1. 将矩阵中每一项替换成它的 "代数余子式";
2. 转置.

矩阵的逆与伴随矩阵

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

验证:

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & a_{22}a_{12} - a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{11}a_{21} & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

线性方程组的解

回顾:

定理

在方程 $Ax = b$ 中, 若 A 可逆, (记 A^{-1} 为 A 的逆矩阵,) 则

$$x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b.$$

这样,

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \\ \dfrac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{pmatrix}.$$

也就是说，二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \frac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

注意到,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|A|}.$$

解线性方程组 (总结), 克拉默法则

1. 写下系数矩阵 A 和常数矩阵 b(列矩阵).
2. 利用常数矩阵替换系数矩阵的第 i 列得到矩阵 R_i.
3. 那么,

$$x_i = \frac{|R_i|}{|A|}.$$

线性方程的解

例子

解方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

先将方程组转化成矩阵方程.
系数矩阵, 自变量矩阵和常数矩阵分别是

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{和} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则线性方程组等价于 $Ax = b$, 即

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

提问: $|A| = ?$

提问: $|A|=?$

$$|A| = 3 \times 1 - (-2) \times 2 = 7.$$

提问: $|A| = ?$

$$|A| = 3 \times 1 - (-2) \times 2 = 7.$$

利用 b 分别替换 A 的第一列和第二列，得

$$R_1 = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$x_1 = \frac{|R_1|}{|A|} = \frac{12 \times 1 - (-2) \times 1}{7} = 2,$$
$$x_2 = \frac{|R_2|}{|A|} = \frac{3 \times 1 - 12 \times 2}{7} = -3.$$

三阶行列式

定义

假设 $A=(a_{ij})$ 是三阶矩阵, 则它的行列式是

$$
\begin{aligned}
|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\
&\quad - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}
$$

- 对角线法则.
- 注意到, 在上面的每一个单项中, 每一行（列）均被取出唯一一个元素, 这也将会是定义高阶行列式的一个要素.

面积

行列式是 (有向) 面积和体积的推广.

面积

行列式是 (有向) 面积和体积的推广.

例子

考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 上由向量 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 作为邻边形成的平行四边形. 以两向量组成以下行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

这正是平行四边形的 (有向) 面积. 可由右手法则获得符号.

例子

考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 上由向量 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 作为邻边形成的平行四边形. 以两向量组成以下行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

这正是平行四边形的有向面积.

例子

考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 上由向量 $(1,1)$ 和 $(-1,1)$ 作为邻边形成的平行四边形. 以两向量组成以下行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

这正是平行四边形的 (有向) 面积.

例子

考虑空间 $\mathbb{R}^3$ 中由向量 $(1,1,0)$、$(-1,1,0)$ 和 $(1,1,1)$ 作为邻边形成的平行六面体. 以三向量组成以下行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

这正是平行六面体的 (有向) 体积.

排列

为了定义高阶行列式, 我们需要引入排列的逆序数的概念.
将[1] $\{1, 2, \cdots, n\}$ 排列成一列 (行), 称为它们的 (全) 排列. 以 S_n 记它们的全排列构成的集合. 全排列的个数为

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

以 $(1, 2, \cdots, n)$ 作为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的标准排列.

定义

给定一排列 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$, 比 p_i 大且排在 p_i 左边的元素个数, 称为 p_i 在这个排列中的逆序数. 排列 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 的逆序数等于各个元素的逆序数之和. 逆序数为奇 (偶) 数的排列称为奇 (偶) 排列.

[1] $\{\}$ 表示不计次序.

排列

为了定义高阶行列式, 我们需要引入排列的逆序数的概念.
将[1] $\{1, 2, \cdots, n\}$ 排列成一列 (行), 称为它们的 (全) 排列. 以 S_n 记它们的全排列构成的集合. 全排列的个数为

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

以 $(1, 2, \cdots, n)$ 作为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的标准排列.

定义

给定一排列 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$, 比 p_i 大且排在 p_i 左边的元素个数, 称为 p_i 在这个排列中的逆序数. 排列 $(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 的逆序数等于各个元素的逆序数之和. 逆序数为奇 (偶) 数的排列称为奇 (偶) 排列.

重要的是逆序数的奇偶性, 而不是它的具体数值.

[1] $\{\}$ 表示不计次序.

例子

例子

考虑 $\{1,2,3\}$ 的排列, 求 $(3,2,1)$ 的逆序数.

解.

元素	逆序数
3	0
2	1(3>2, 但 3 在 2 的左边)
1	2(3>2,2>1, 但在 1 的左边)

排列的逆序数 $= 0 + 1 + 2 = 3.$ □

例子

例子

考虑 $\{1,2,3\}$ 的排列, 求 $(3,2,1)$ 的逆序数.

解.

元素	逆序数
3	0
2	1(3>2, 但 3 在 2 的左边)
1	2(3>2,2>1, 但在 1 的左边)

排列的逆序数 $= 0 + 1 + 2 = 3.$ □

这是奇排列.

对换

定义

在排列中, 将以下操作称为对换: 将两个元素对调, 保持其余元素不动. 将相邻两个元素对换, 称为相邻对换.

对换

定义

在排列中, 将以下操作称为对换: 将两个元素对调, 保持其余元素不动. 将相邻两个元素对换, 称为相邻对换.

定理

一个排列中任意两个元素对换, 排列改变奇偶性.

对换

定义

在排列中, 将以下操作称为对换: 将两个元素对调, 保持其余元素不动. 将相邻两个元素对换, 称为相邻对换.

定理

一个排列中任意两个元素对换, 排列改变奇偶性.

推论

将奇 (偶) 排列对换成标准排列的对换次数为奇 (偶) 数.

n 阶行列式

假设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列, 记它的逆序数为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$. 定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)\in S_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

求和中有 $n!$ 项. 这里, 我们使用了求和符号.

n 阶行列式

假设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列, 记它的逆序数为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$. 定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)\in S_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

求和中有 $n!$ 项. 这里, 我们使用了求和符号.
在行列式的每一行取出一项, 使得它们分别处于不同的列, 作它们的乘积 (配上符号), 这样得到求和中的项.

n 阶行列式

假设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列, 记它的逆序数为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$. 定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)\in S_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

求和中有 $n!$ 项. 这里, 我们使用了求和符号.
在行列式的每一行取出一项, 使得它们分别处于不同的列, 作它们的乘积 (配上符号), 这样得到求和中的项.

评述

我们将会给出行列式的递归公式.

例子

例子

二阶行列式

例子

例子

下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这是因为若要 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 非零, 必须有 $p_1 \leq 1$, $p_2 \leq 2$, $\cdots$, $p_n \leq n$. 另外, $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 + 2 + \cdots + n$. 所以 $p_1 = 1, \cdots p_n = n$.

对于上三角行列式也有类似的结论.

例子

利用前面的例子, 可以推得

例子

对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

行列式的性质

假设 $A \in M_{n\times n}$, 以及

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

定义

以下矩阵称为 A 的转置, 即 $(A^T)_{ij} = a_{ji}$:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

命题 (性质 1)

行列式等于它的转置行列式: $|A| = |A^T|$.

命题 (性质 1)

行列式等于它的转置行列式: $|A| = |A^T|$.

命题 (性质 2)

对换行列式的两行 (列), 行列式变号.

命题 (性质 1)

行列式等于它的转置行列式: $|A| = |A^T|$.

命题 (性质 2)

对换行列式的两行 *(列)*, 行列式变号.

以二、三阶行列式作为例子.

评述

行和列的地位相同. 行列式的性质凡是对行成立的对列也成立. 反之亦然.

推论

如果行列式两行完全相同，则此行列式为 *0*.

证明.

$|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0.$ □

命题 (性质 3)

若行列式某一行 (列) 乘以常数 k, 则行列式等于原行列式乘以 k, 即:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明.

利用定义. □

命题 (性质 4)

行列式若有两行 (列) 成比例, 则行列式为 0.

证明.

利用推论和性质 3. □

命题 (性质 5)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

命题 (性质 6)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \ (i \neq j)$$

证明.

利用性质 4 和性质 5. □

评述

1. 性质 2 的推论应用于线性方程组中的现象如下: 两行完全相同, 则对应的方程相斥 (矛盾) 或相同 (取决于常数相异或相同), 则无解或解不唯一 (由 $n-1$ 个方程解 n 个未知数). 无论是其中哪种情形, 系数矩阵不可逆.
2. 性质 6 对应于: 将其中一条方程乘以常数加到另一条方程上.

行列式的计算

例子

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & \iddots & a_{2n} \\ & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 希望变成上三角行列式.

解.

- 将第 n 行逐行往上移到第 1 行, 交换行 $(n-1)$ 次, 需要乘上因子 $(-1)^{n-1}$.
- 将原先第 $(n-1)$ 行（现在第 n 行）逐行往上移到第 2 行，交换行 $(n-2)$ 次，需要乘上因子 $(-1)^{n-2}$.
- $\vdots$
- 将原先第 2 行（现在第 n 行）逐行往上移到第 $(n-1)$ 行，交换行 1 次，需要乘上因子 $(-1)^1$.

最终得到行列式
$$\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{1n} \end{vmatrix} = a_{n1}a_{(n-1)2}\cdots a_{1n}$$
乘上因子 $(-1)^{1+2+\cdots+(n-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$. □

评述

总是可以通过操作 $r_i + kr_j$（或 $c_i + kc_j$）将行列式化成上（下）三角行列式.

例子

希望化成下三角行列式或有一行（列）中只有一个非零元.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \underset{r_3 - 10 r_1}{\overset{r_2 - 4 r_1}{=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_4 + \frac{1}{7} r_2}{\overset{r_3 - \frac{15}{7} r_2}{=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{7} & -\frac{80}{7} \\ 0 & 0 & \frac{9}{7} & \frac{45}{7} \end{vmatrix} \overset{r_4 = -\frac{9}{16} r_3}{=\!=} 0.$$

例子

若行列式有某一行（列）全为 0, 则行列式 =0.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{2r_i}{=\!=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 2\cdot 0 & \cdots & 2\cdot 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 2D.$$

所以 $D = 0$.

例子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & O & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}}_{=D_1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}}_{=D_2}$$

证明.

利用操作 $r_i + \lambda r_j$ 和 $r_i \leftrightarrow r_j$ 将 D_1 化成下三角行列式

$$\begin{vmatrix} p_{11} & & & \\ p_{12} & p_{22} & O & \\ \vdots & & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}.$$

利用操作 $c_i + \lambda c_j$ 和 $c_i \leftrightarrow c_j$ 将 D_2 化成下三角行列式

$$\begin{vmatrix} q_{11} & & & \\ q_{12} & q_{22} & O & \\ \vdots & & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}.$$

例子

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & d \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{上一例子}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2.$$

例子

$$\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & a & & & b & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & c & & & d & \\ c & & & & & d \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ c & & & & & d \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^8 \begin{vmatrix} a & b & & & & \\ c & d & & & & \\ & & a & & & b \\ & & & a & b & \\ & & & c & d & \\ & & c & & & d \end{vmatrix} \overset{\text{利用上一例子}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^3 .$$

总结

- 利用对角线法则定义二三阶行列式;
- 利用行列式解二元一次方程组;
- 行列式是面积和体积的推广;
- 一般行列式的定义;
- 行列式的一些基本性质.