低阶行列式

林胤榜

同济大学数学科学学院

2023 年 9 月 20 日

主要内容

二阶行列式

定义

方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$$

的行列式是

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

最后一个表达式是**对角线法则**的一个例子.

逆矩阵

行列式的重要性:

定理

$A \in M_{2\times 2}$ 可逆当且仅当 A 的行列式不等于零.

问题

如何求方阵 A 的逆?

定义

假设 $A = (a_{ij})$ 是二阶方阵, 则它的**伴随矩阵**是

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

那么,

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$$

验证:

$$\begin{aligned}
A^*A &= \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & a_{22}a_{12} - a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{11}a_{21} & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

线性方程组的解

回顾:

定理

在方程 $Ax = b$ 中, 若 A 可逆, (记 A^{-1} 为 A 的逆矩阵,) 则

$$x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b.$$

这样,

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \\ \dfrac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{pmatrix}.$$

也就是说，二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \frac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

注意到，

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|A|}.$$

解线性方程组 (总结)

1. 写下系数矩阵 A 和常数矩阵 b(列矩阵).
2. 利用常数矩阵替换系数矩阵的第 i 列得到矩阵 R_i.
3. 那么,

$$x_i = \frac{|R_i|}{|A|}.$$

线性方程的解

例子

解方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

系数矩阵, 自变量矩阵和常数矩阵分别是

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{和} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

则线性方程组等价于 $Ax = b$, 即

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

提问: $|A| = ?$

提问: $|A| =?$

$$|A| = 3 \times 1 - (-2) \times 2 = 7.$$

提问: $|A| = ?$

$$|A| = 3 \times 1 - (-2) \times 2 = 7.$$

利用 b 分别替换 A 的第一列和第二列，得

$$R_1 = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$x_1 = \frac{|R_1|}{|A|} = \frac{12 \times 1 - (-2) \times 1}{7} = 2,$$
$$x_2 = \frac{|R_2|}{|A|} = \frac{3 \times 1 - 12 \times 2}{7} = -3.$$

三阶行列式

定义

假设 $A = (a_{ij})$ 是三阶矩阵，则它的行列式是

$$
\begin{aligned}
|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\
&\quad - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}
$$

- 对角线法则.
- 注意到，在上面的每一个单项中，每一行（列）均被取出唯一一个元素，这也将会是定义高阶行列式的一个要素.