# 矩阵与线性方程组

林胤榜

同济大学数学科学学院

2023 年 9 月 20 日

# 主要内容

# 矩阵

## 定义

$m$ 行 $n$ 列矩阵，或 $m \times n$ 矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

其中，$a_{ij} \in \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$. 有时将矩阵 $A$ 记为

$$(a_{ij}) = (a_{ij})_{m \times n}.$$

称 $a_{ij}$ 为矩阵的 $(i,j)$ **元**. 这样的矩阵的集合记成 $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 或 $M_{m\times n}(\mathbb{C})$，如无歧义，简记为 $M_{m\times n}$. ($M$ 代表 matrix.)

## 例子

行向量/行矩阵:

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

列向量/列矩阵:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

## 例子

行向量/行矩阵:

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

列向量/列矩阵:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

## 评述

1. 矩阵和线性映射有着密切的联系, 矩阵是表达线性映射的一种方式. (矩阵 (方阵) 还有别的用途.)
2. 矩阵是研究线性映射的有力工具.

# 矩阵的一些运算

1. **(数乘)** $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$,

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{m\times n}.$$

# 矩阵的一些运算

1. (数乘) $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}$,
$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{m\times n}.$$
2. (矩阵相乘) $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$. 记
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1k} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$
$$AB \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$$
的 $(i,j)$ 元等于 $A$ 的第 $i$ 行与 $B$ 的第 $j$ 列逐项分别相乘，具体为 $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$.

# 矩阵相乘的例子

## 评述

- 只有当 $A$ 的列数 $=B$ 的行数, 才能定义 $AB$.
- $AB$ 有定义不代表 $BA$ 有定义.

# 矩阵相乘的例子

## 评述

- 只有当 $A$ 的列数 $=B$ 的行数，才能定义 $AB$.
- $AB$ 有定义不代表 $BA$ 有定义.

## 例子

$A \in M_{m\times n}$, $X \in M_{n\times 1}(\cong \mathbb{R}^n)$, 则 $AX \in M_{m\times 1}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

# 矩阵诱导线性映射

## 定义 (左乘矩阵 $A$)

$A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, **定义映射** $L_A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

## 命题

$L_A$ 是线性映射.

**证明:**

- $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $L_A(X+Y) = L_A(X) + L_A(Y)$, 这是因为

$$
\begin{aligned}
L_A(X+Y) &= A(X+Y) \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(x_1+y_1) + \cdots + a_{1n}(x_n+y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1+y_1) + \cdots + a_{mn}(x_n+y_n) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots+a_{mn}y_n \end{pmatrix} \\
&=AX+AY=L_A(X)+L_A(Y).
\end{aligned}
$$

- $L_A(aX)=A(aX)=aAX=aL_A(X)$.

# 矩阵乘法与映射复合

记号如前.

**命题**

$L_A \circ L_B = L_{AB}$.

# 线性方程组与矩阵

矩阵可以帮助解线性方程组.

**定义**

若矩阵 $A$ 的行数与列数相等，则称 $A$ 为**方阵**.

给定线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} . \tag{1}$$

注意：在这个例子中，方程的个数等于未知数个数.

1. 首先利用矩阵简写方程组：**系数矩阵** $A$，**未知数矩阵** $X$ **和常数矩阵** $b$ 如下：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

注意：行数等于方程个数，列数等于未知数个数.

2. (重新解释问题.) 求解方程 (1) 等价于以下两个问题:
   - (i) $b$ 在映射 $L_A$ 下是否有原象? ($L_A^{-1}(b) = \emptyset$?)
   - (ii) $L_A^{-1}(b) =?$

# 回顾：一元一次方程

## 问题

$a, b \in \mathbb{R}$，求解 $x$:

$$ax = b.$$

1. 若 $a \neq 0$，则 $a^{-1}ax = a^{-1}b$，即 $x = \frac{b}{a}$.
2. 若 $a = 0$，$b = 0$，则任意实数 $x \in \mathbb{R}$ 均是解.
3. 若 $a = 0$，$b \neq 0$，无解.

# 回顾：一元一次方程

## 问题

$a, b \in \mathbb{R}$，求解 $x$:

$$ax = b.$$

1. 若 $a \neq 0$，则 $a^{-1}ax = a^{-1}b$，即 $x = \frac{b}{a}$.
2. 若 $a = 0$，$b = 0$，则任意实数 $x \in \mathbb{R}$ 均是解.
3. 若 $a = 0$，$b \neq 0$，无解.

先研究第一种情形.

## 问题

1. 第一种情形的关键是什么？
2. 对一般方阵来讲，合适的相应条件是什么？

# 逆矩阵

第一种情形的关键：存在逆元，$a^{-1}a = aa^{-1} = 1$(幺元).

## 定义

$A, B \in M_{n\times n}$，若

$$AB = BA = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则称 $A$ 是**可逆矩阵**，$B$ 是 $A$ 的**逆矩阵**，记为 $A^{-1}$.

# 方程组的解

**定理**

在方程

$$Ax = b$$

中, 若 $A$ 可逆, (记 $A^{-1}$ 为 $A$ 的逆矩阵,) 则

$$x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}b.$$

判断方阵是否可逆的一个工具:

**行列式**.

这是接下来要介绍的内容.