线性代数

林胤榜

同济大学数学科学学院

主要内容

问题

为什么学习线性代数?

例子 (投入产出模型)

投入产出模型描述不同经济领域之间的依赖关系. 它是线性的, 也就是说它利用的是线性方程组. Wassily Leontief 由于相关成就获得 1973 年诺贝尔经济学奖.

假设有 n 个经济领域. 第 i 个领域生产 (该领域)x_i 单位的产品. 而为了生产一单位该产品, 它需要 a_{ij} 单位来自于第 j 领域的产品. 它还会卖 y_i 单位给消费者. 这样, 我们有以下一组方程:

$$\begin{cases} x_1 & = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 & = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + y_1 \\ & \vdots \\ x_n & = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + y_n. \end{cases}$$

我们将会用矩阵的形式来记这类方程组: $x = Ax + y$.

例子 (线性规划)

线性规划需要在线性约束下 (如 $a_1x_1+a_2x_2\le b$) 极大 (小) 化一个线性函数 (如 $f(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2$). 这是运筹学中的一个重要方法, 在比如经济学和商业管理等领域有着广泛的应用.

例子 (线性规划)

线性规划需要在线性约束下 (如 $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$) 极大 (小) 化一个线性函数 (如 $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$). 这是运筹学中的一个重要方法, 在比如经济学和商业管理等领域有着广泛的应用.

例子 (飞行器设计)

现代飞行器设计广泛使用计算机辅助, 以降低对风洞试验的依赖. 其中广泛运用线性代数, 包括矩阵分块和分解.

本课程的核心概念:

线性空间与线性变换.

本课程的核心概念:

线性空间与线性变换.

线性空间是线性代数要研究的结构.

本课程的核心概念:

线性空间与线性变换.

线性空间是线性代数要研究的结构.

强大的工具:

矩阵与行列式.

映射

定义 (映射)

假设 X, Y 为集合，从 X 到 Y 的映射是指一套规则, 对 X 中任一元素 x 在 Y 中给指定唯一一个元素 $f(x)$ 与之对应. 通常以

$$f\colon X \to Y \quad \text{或} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

表示该映射. 若无歧义，也会以 f 表示该映射. 称 X 为 f 的定义域, Y 是 f 的陪域.

映射

定义 (映射)

假设 X, Y 为集合，从 X 到 Y 的映射是指一套规则, 对 X 中任一元素 x 在 Y 中给指定唯一一个元素 $f(x)$ 与之对应. 通常以

$$f\colon X \to Y \quad \text{或} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

表示该映射. 若无歧义，也会以 f 表示该映射. 称 X 为 f 的定义域, Y 是 f 的陪域.

注意：定义域和值域是映射的要素.

映射

定义 (映射)

假设 X, Y 为集合，从 X 到 Y 的映射是指一套规则, 对 X 中任一元素 x 在 Y 中给指定唯一一个元素 $f(x)$ 与之对应. 通常以

$$f\colon X \to Y \quad \text{或} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

表示该映射. 若无歧义，也会以 f 表示该映射. 称 X 为 f 的定义域, Y 是 f 的陪域.

注意：定义域和值域是映射的要素. 在元素层面，以

$$x \longmapsto f(x)$$

表示该映射将元素 x 映到元素 $f(x)$.

集合的直积（笛卡尔积）

定义

假设 X, Y 为集合, X 和 Y 的直积 (笛卡尔积) 是指以下集合

$$\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\},$$

记为 $X \times Y$.

记号 $\in$ 表示属于.

集合的直积（笛卡尔积）

定义

假设 X, Y 为集合, X 和 Y 的直积 (笛卡尔积) 是指以下集合

$$\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\},$$

记为 $X \times Y$.

记号 $\in$ 表示属于.

例子

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

记号 $\mathbb{R}$ 表示实数集.

记号

- $\in$ 表示属于;
- $\exists$ 表示存在;
- $\forall$ 表示对任意.

线性空间的例子

例子 ((实) 平面)

集合 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ 配上加法运算

$$+ \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

和数乘运算

$$\cdot \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

在元素上的作用如下:

$$+ \colon (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\cdot \colon a(x, y) = (ax, ay).$$

这样, $\mathbb{R}^2$ 构成一个 **(实)** 向量空间. 其中的元素称为向量.

平面上的这些运算满足的性质:

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$

i (结合律)
$((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$;

ii (零向量) $(x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1, y_1)$;

iii (加法逆元/反向量) $(x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (0, 0)$;

iv (交换律)$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$;

平面上的这些运算满足的性质:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$

- i (结合律)
  $((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$;
- ii (零向量) $(x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1, y_1)$;
- iii (加法逆元/反向量) $(x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (0, 0)$;
- iv (交换律)$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$;

  (数乘满足的关系)
- v $1 \cdot (x_1, y_1) = (x_1, y_1)$;
- vi $a(b(x_1, y_1)) = (ab)(x_1, y_1)$;

平面上的这些运算满足的性质:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$

i (结合律)
$((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$;

ii (零向量) $(x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1, y_1)$;

iii (加法逆元/反向量) $(x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (0, 0)$;

iv (交换律)$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$;

(数乘满足的关系)

v $1 \cdot (x_1, y_1) = (x_1, y_1)$;

vi $a(b(x_1, y_1)) = (ab)(x_1, y_1)$;

(数乘与加法之间的关系)

vii (分配率)$(a + b)(x_1, y_1) = a(x_1, y_1) + b(x_1, y_1)$;

vii $a((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = a(x_1, y_1) + a(x_2, y_2)$.

线性空间的定义

将上一例子的性质抽象出来, 得到以下定义.

定义 (线性空间)

假设 V 是集合配上两个运算 $+$ 和 $\cdot$,

$$\begin{aligned}(\text{加法})\ +\colon\ & V \times V \to V,\\ (\text{数乘})\ \cdot\colon\ & \mathbb{R} \times V \to V,\end{aligned}$$

使得以下条件成立: $\forall \mu, \nu, \omega \in V$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

定义 (线性空间 (续))

1. (结合律) $(\mu+\nu)+\omega=\mu+(\nu+\omega)$;
2. (零元) $\exists 0\in V$, 使得 $\forall v\in V$, $v+0=v$;
3. (加法逆元)$\forall\nu\in V$, $\exists\mu\in V$, 使得 $\mu+\nu=0$;
4. (交换律)$\mu+\nu=\nu+\mu$;

(数乘满足的关系)

5. $1\cdot\nu=\nu$;
6. $a(b\nu)=(ab)\nu$;

(数乘与加法之间的关系)

7. (分配率)$(a+b)\nu=a\nu+b\nu$;
8. $a(\mu+\nu)=a\mu+a\nu$.

则称 V 是实线性空间 (向量空间), V 中元素称为向量.

更多例子

利用实数的性质, 可以验证以下例子满足上面的八条性质.

例子 (欧氏空间)

n 是自然数.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

加法和数乘如下:

$$+: (x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$
$$\cdot: a(x_1, \cdots, x_n) = (ax_1, \cdots, ax_n)$$

这是实平面的推广.

例子 (复平面作为实线性空间)

$$\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

加法和数乘如下: 对于 $x_1, x_2, y_1, y_2, a \in \mathbb{R}$,

$$+ : (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$\cdot : a(x + iy) = ax + iay$$

例子 (实系数一元多项式)

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

加法与数乘:

$$\sum a_i x^i + \sum_i b_i x^i = ?$$

$$b \sum a_i x^i = ?$$

例子

假设 X 是一个集合，

$$V = \{X \text{ 上的实值函数}\} = \{f\colon X \to \mathbb{R}\}.$$

$$\begin{aligned} +\colon V \times V &\to V, \\ (f, g) &\mapsto (f+g). \end{aligned}$$

其中，$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

$$\begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{R} \times V &\to V, \\ (a, f) &\mapsto af. \end{aligned}$$

其中，$(af)(x) = a(f(x))$.

线性映射的定义

定义 (线性映射)

假设 V 和 W 是 (实) 线性空间, $\varphi\colon V \to W$ 是映射. 如果 $\forall v_1, v_2 \in V, a \in \mathbb{R}$,

1. (保持加法) $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
2. (保持数乘) $\varphi(av_1) = a\varphi(v_1)$,

则 φ 是 V 到 W 的线性映射 **(线性变换)**。

线性映射的例子

例子 (投影)

欧氏空间往一个坐标的投影:

$$\pi_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_k.$$

验证上述 (i) 和 (ii).

例子 (投影)

(三维) 欧氏空间往一个坐标平面的投影:

$$\begin{aligned} \pi_{xy} \colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2, \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y). \end{aligned}$$

它将直线映成直线. 这 "线性映射" 命名的部分原因.

例子 (求导)

对多项式取导数:

$$D\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$
$$\sum_{k=0}^{d} a_k x^k \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k\left(kx^{k-1}\right)$$

更具体地,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_d x^d \mapsto a_1 + 2a_2 x + \cdots + d a_d x^{d-1}.$$

验证上述 (i),(ii).