线性代数

林胤榜

同济大学数学科学学院

2023 年 9 月

主要内容

本课程的“主角”(大部分时间藏在背景中):

线性空间与线性变换.

本课程的“主角”(大部分时间藏在背景中):

线性空间与线性变换.

线性空间是线性代数要研究的结构.

本课程的“主角”(大部分时间藏在背景中):

线性空间与线性变换.

线性空间是线性代数要研究的结构.

强大的工具:

矩阵与行列式.

映射

定义 (映射)

假设 X, Y 为集合，从 X 到 Y 的**映射**是指一套规则，对 X 中任一元素 x 在 Y 中给指定唯一一个元素 $f(x)$ 与之对应. 通常以

$$f\colon X \to Y \quad \text{或} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

表示该映射. 若无歧义，也会以 f 表示该映射. 称 X 为 f 的定义域，Y 是 f 的陪域.

映射

定义 (映射)

假设 X, Y 为集合，从 X 到 Y 的**映射**是指一套规则，对 X 中任一元素 x 在 Y 中给指定唯一一个元素 $f(x)$ 与之对应. 通常以

$$f\colon X \to Y \quad \text{或} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

表示该映射. 若无歧义，也会以 f 表示该映射. 称 X 为 f 的定义域，Y 是 f 的陪域.

注意：定义域和值域是映射的要素.

映射

定义 (映射)

假设 X, Y 为集合，从 X 到 Y 的**映射**是指一套规则，对 X 中任一元素 x 在 Y 中给指定唯一一个元素 $f(x)$ 与之对应．通常以

$$f\colon X \to Y \quad \text{或} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

表示该映射．若无歧义，也会以 f 表示该映射．称 X 为 f 的定义域，Y 是 f 的陪域．

注意：定义域和值域是映射的要素．在元素层面，以

$$x \longmapsto f(x)$$

表示该映射将元素 x 映到元素 $f(x)$．

集合的直积（笛卡尔积）

定义

假设 X, Y 为集合，X 和 Y 的**直积 (笛卡尔积)** 是指以下集合

$$\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\},$$

记为 $X \times Y$.

记号 $\in$ 表示属于.

集合的直积（笛卡尔积）

定义

假设 X, Y 为集合, X 和 Y 的**直积 (笛卡尔积)** 是指以下集合

$$\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\},$$

记为 $X \times Y$.

记号 $\in$ 表示属于.

例子

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

记号 $\mathbb{R}$ 表示实数集.

记号

- $\in$ 表示属于;
- $\exists$ 表示存在;
- $\forall$ 表示对任意.

线性空间的例子

例子 ((实) 平面)

集合 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ 配上加法运算

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

和数乘运算

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

在元素上的作用如下:

$$+ : (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\cdot : a(x, y) = (ax, ay).$$

这样, $\mathbb{R}^2$ 构成一个 **(实) 向量空间**. 其中的元素称为**向量**.

平面上的这些运算满足的性质:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$

i (结合律)
$((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$;

ii (零向量) $(x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1, y_1)$;

iii (加法逆元/反向量) $(x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (0, 0)$;

iv (交换律)$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$;

平面上的这些运算满足的性质:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$

i **(结合律)** $((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$;

ii **(零向量)** $(x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1, y_1)$;

iii **(加法逆元/反向量)** $(x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (0, 0)$;

iv **(交换律)** $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$;

(数乘满足的关系)

v $1 \cdot (x_1, y_1) = (x_1, y_1)$; ı;

vi $a(b(x_1, y_1)) = (ab)(x_1, y_1)$;

平面上的这些运算满足的性质:
$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$

- i (结合律)
  $((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$;
- ii (零向量) $(x_1, y_1) + (0, 0) = (x_1, y_1)$;
- iii (加法逆元/反向量) $(x_1, y_1) + (-x_1, -y_1) = (0, 0)$;
- iv (交换律)$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$;

  (数乘满足的关系)
- v $1 \cdot (x_1, y_1) = (x_1, y_1)$; ı;
- vi $a(b(x_1, y_1)) = (ab)(x_1, y_1)$;

  (数乘与加法之间的关系)
- vii (分配率)$(a + b)(x_1, y_1) = a(x_1, y_1) + b(x_1, y_1)$;
- vii $a((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = a(x_1, y_1) + a(x_2, y_2)$.

线性空间的定义

将上一例子的性质抽象出来，得到以下定义.

定义 (线性空间)

假设 V 是集合配上两个运算 $+$ 和 $\cdot$,

$$
\begin{aligned}
(\text{加法})\ +&: V \times V \to V, \\
(\text{数乘})\ \cdot&: \mathbb{R} \times V \to V,
\end{aligned}
$$

使得以下条件成立：$\forall \mu, \nu, \omega \in V$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

定义 (线性空间 (续))

1. (结合律) $(\mu+\nu)+\omega=\mu+(\nu+\omega)$;
2. (零元) $\exists 0\in V$, 使得 $\forall v\in V$, $v+0=v$;
3. (加法逆元)$\forall\nu\in V$, $\exists\mu\in V$, 使得 $\mu+\nu=0$;
4. (交换律)$\mu+\nu=\nu+\mu$;

   (数乘满足的关系)
5. $1\cdot\nu=\nu$;
6. $a(b\nu)=(ab)\nu$;

   (数乘与加法之间的关系)
7. (分配率)$(a+b)\nu=a\nu+b\nu$;
8. $a(\mu+\nu)=a\mu+a\nu$.

则称 V 是实线性空间 (向量空间), V 中元素称为向量.

更多例子

利用实数的性质, 可以验证以下例子满足上面的八条性质.

例子 (欧氏空间)

n 是自然数.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

加法和数乘如下:

$$+: (x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\cdot: a(x_1, \cdots, x_n) = (ax_1, \cdots, ax_n)$$

这是实平面的推广.

例子 (复平面作为实线性空间)

$$\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

加法和数乘如下: 对于 $x_1, x_2, y_1, y_2, a \in \mathbb{R}$,

$$+: (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$\cdot: a(x + iy) = ax + iay$$

例子 (实系数一元多项式)

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

加法与数乘:

$$\sum a_i x^i + \sum_i b_i x^i = ?$$

$$b \sum a_i x^i = ?$$

例子

假设 X 是一个集合，

$$V=\{X\text{ 上的实值函数}\}=\{f\colon X\to\mathbb{R}\}.$$

$$\begin{aligned} +\colon V\times V &\to V,\\ (f,g)&\mapsto (f+g). \end{aligned}$$

其中，$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

$$\begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{R}\times V &\to V,\\ (a,f)&\mapsto af. \end{aligned}$$

其中，$(af)(x)=a(f(x))$.

线性映射的定义

定义 (线性映射)

假设 V 和 W 是 (实) 线性空间, $\varphi\colon V \to W$ 是映射. 如果 $\forall v_1, v_2 \in V, a \in \mathbb{R}$,

1. (保持加法) $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$,
2. (保持数乘) $\varphi(av_1) = a\varphi(v_1)$,

则 φ 是 V 到 W **的线性映射 (线性变换)**。

线性映射的例子

例子（投影）

欧氏空间往一个坐标的投影:

$$\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_k.$$

验证上述 (i) 和 (ii).

例子 (投影)

(三维) 欧氏空间往一个坐标平面的投影:

$$\begin{aligned} \pi_{xy}\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2, \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y). \end{aligned}$$

它将直线映成直线. 这 "线性映射" 命名的部分原因.

例子（求导）

对多项式取导数:

$$D\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$$
$$\sum_{k=0}^{d} a_k x^k \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k (k x^{k-1})$$

更具体地,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_d x^d \mapsto a_1 + 2a_2 x + \cdots + d a_d x^{d-1}.$$

验证上述 (i),(ii).